

310 Секция 7. Физические и математические методы исследования

4. Любая техническая система – ответ на некоторую человеческую потребность (см. историю колеса).

5. Прорывом в теории изобретения технических систем был ТРИЗ (автор Г. С. Альтшуллер, 1948 г. и др.). Его современное ответвление представил Д. Бойд в [5].

Л и т е р а т у р а

1. Великович, Л. Л. Физика и математика в техническом университете: проблемы взаимодействия и применения в процессе преподавания // Физическое образование: современное состояние и перспективы : материалы Республ. науч.-метод. семинара, посвящ. 65-летию физ.-мат. фак. МГУ им. А. А. Кулешова, Могилев, 16 окт. 2014 г. – С. 9–12.
2. Великович, Л. Л. О некоторых аспектах математического моделирования сложных систем / Л. Л. Великович // Современные проблемы машиноведения : материалы XII Междунар. науч.-техн. конф. (науч. чтения, посвящ. П. О. Сухому), Гомель, 22–23 нояб. 2018 г. / М-во образования Респ. Беларусь, Гомел. гос. техн. ун-т им. П. О. Сухого, Фил. ПАО «Компания «Сухой» ОКБ «Сухого» ; под общ. ред. А. А. Бойко. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2018. – С. 341–343.
3. Иванов, И. Е. Методы подобия физических процессов : учеб. пособие / И. Е. Иванов, В. Е. Ерещенко. – М. : МАДИ, 2015. – 144 с.
4. Кричлоу, Генри Б. Современная разработка нефтяных месторождений – проблемы моделирования : пер. с англ. / Генри Б. Кричлоу. – М. : Недра, 1979. – 303 с.
5. Бойд, Д. Творчество в рамках / Д. Бойд, Д. Голденберг : пер. с англ. И. В. Гродель. – Минск : Попурри, 2014. – 336 с. : ил.

УДК 539.12

**ПОСТРОЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ ИНТЕГРАЛОВ
МЕЛЛИНА–БАРНСА НА ОСНОВЕ КОНТУРОВ
СТАЦИОНАРНОЙ ФАЗЫ**

В. И. Лашкевич, О. П. Соловцова

*Учреждение образования «Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого», Республика Беларусь*

Интегралы Меллина–Барнса (МБ) [1] – семейство интегралов в комплексной плоскости, подынтегральное выражение которых определяется произведением гамма-функций, широко используются в физике и технике (см., например, работу [2]), и в последние годы достигнут значительный прогресс в численных оценках этих интегралов [3], [4]. Отметим, что в литературе обсуждается расчет интегралов МБ с точностью до 10^{-12} и выше и высокая точность востребована также в математической физике и экспериментальной математике. На первый взгляд, наилучшая эффективность при численной оценке интегралов МБ достигается на контуре стационарной фазы, где осцилляции подынтегральной функции отсутствуют. Однако решение соответствующего дифференциального уравнения для контура стационарной фазы и его последующее применение при численном интегрировании могут потребовать больших компьютерных затрат и даже вообще быть невыполнены. Первая попытка построить эффективную аппроксимацию для контура стационарной фазы с использованием разложения подынтегральной функции в ряд в окрестности седловой точки была сделана Косовером [5] применительно к вычислениям партонных функций распределений (соответствующий контур далее обозначается как C_K).

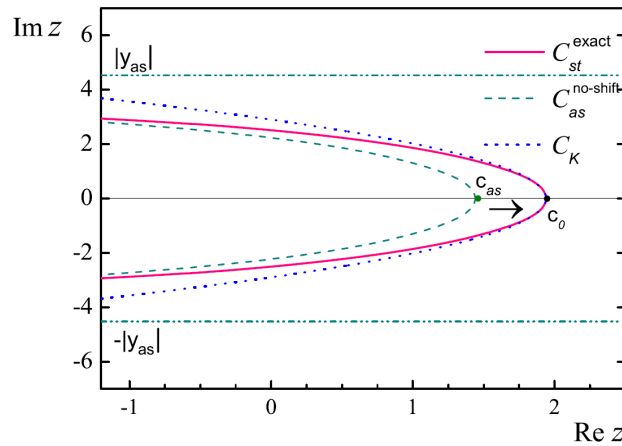


Рис. 1. Эффективные контуры для интеграла (1):
сплошная линия – контур стационарной фазы, пунктирная линия –
асимптотический контур без сдвижки; линия из точек – контур Косовера,
штрих-пунктирные горизонтальные прямые – асимптотический предел контура
стационарной фазы на бесконечности

В настоящей работе представлены теоретические основы построения асимптотического контура стационарной фазы C_{as} , который позволяет эффективно и с высокой точностью вычислять интегралы МБ в случае ограниченного асимптотического поведения контура стационарной фазы на бесконечности. Идея построения C_{as} демонстрируется на точно решаемом примере, в случае, если функция имеет $F(s) = s^a$, тогда ее мелиновские моменты равны:

$$M(z) = \int_0^1 ds s^{z-1} F(s) = \frac{\Gamma(a+z)}{\Gamma(a+1+z)}. \quad (1)$$

На рис. 1 демонстрируется форма рассматриваемых эффективных контуров. Из этого рисунка видно, что C_{as} после сдвига в седловую точку c_0 совпадает с точным контуром стационарной фазы.

Следует отметить, что восстановление с помощью обратного преобразования Меллина структурной функции F_3 , записанной в обычно используемом виде

$$x_B F_3(x_B, Q_0^2) = A x_B^a (1 - x_B)^b (1 + \gamma x_B),$$

полностью аналогично рассмотренному выше простейшему примеру. Численные оценки при восстановлении структурной функции F_3 , включая с учетом Q^2 – эволюции меллиновских моментов, можно найти в работе [4]. Предложенный метод интегрирования по контуру C_{as} позволит в существенно ускорить обработку экспериментальных данных по ГНР и достигать высоких точностей расчетов.

Следующий рассмотренный пример демонстрирует возможности применения контура C_{as} для интегралов МБ, возникающих в массивных диаграммах Фейнмана в квантовой теории поля. Для этого рассмотрим интеграл в евклидовой области $-s > 0$:

$$I_l(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} dz (-s)^{-z} \frac{\Gamma^3(-z)\Gamma(1+z)}{\Gamma(-2z)\Gamma(1-z)\Gamma(2+z)}. \quad (2)$$

Следуя предлагаемому нами методу построения контура C_{as} , получаем:

$$z_{as}^{(I)} = \text{yctg} \left\{ \frac{2}{5} \left([-\ln(-s) + \ln 4]y + \frac{3}{2} \pi \text{sign}(y) \right) \right\} + c_0 + iy.$$

Отметим, что в зависимости от величины параметра $-s$ контур C_{as} замыкается в левой или правой полуплоскости и асимптотика контура стационарной фазы ограничена двумя параллельными оси абсцисс прямыми, определяемыми выражениями:

$$y_{as}^{(I)} = \pm \frac{\pi}{-\ln(-s) + \ln 4}; \quad 0 < -s < 4; \quad \text{Re } z \rightarrow -\infty;$$

$$y_{as}^{(I)} = \pm \frac{3}{2} \frac{\pi}{|-\ln(-s) + \ln 4|}; \quad -s > 4; \quad \text{Re } z \rightarrow \infty.$$

Расчеты показали, что если число N слагаемых в квадратурной формуле невелико, то контур C_K оказывается эффективнее, чем контур C_{as} . Однако, начиная примерно с $N > 16$, результат использования асимптотического контура оказывается более точным, как в области $0 < -s < 4$, так и в области $-s > 4$. Этот результат согласуется с тем, что с увеличением требуемой точности интегрирования увеличивается область интегрирования и контур C_{as} приближается к точному контуру C_{st} , тогда как контур C_K удаляется.

Следующий пример демонстрирует, что на практике могут встретиться интегралы МБ, для которых структура контуров стационарной фазы может оказаться чрезвычайно сложной, затрудняющей интегрирование по точным контурам. Рассмотрим такого типа интеграл:

$$I_{II}(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} dz (-s)^z \frac{\Gamma^4(-z)\Gamma(1+2z)}{\Gamma^2(-2z)\Gamma^2(1+z)}. \quad (3)$$

Структура контуров стационарной фазы для интеграла $I_{II}(s)$ как в области $0 < -s < 4^3$ (рис. 2, а), так и в области $-s > 4^3$ показана на рисунке (рис. 2, б). Асимптотики контура стационарной фазы изображены в виде горизонтальных прямых. Как видно из рис. 2, контур C_K не воспроизводит асимптотическое поведение контура стационарной фазы, а в случае $-s > 4^3$ этот контур направлен в сторону, противоположную направлению асимптотического контура, что не позволяет провести интегрирование по C_K с высокой точностью.

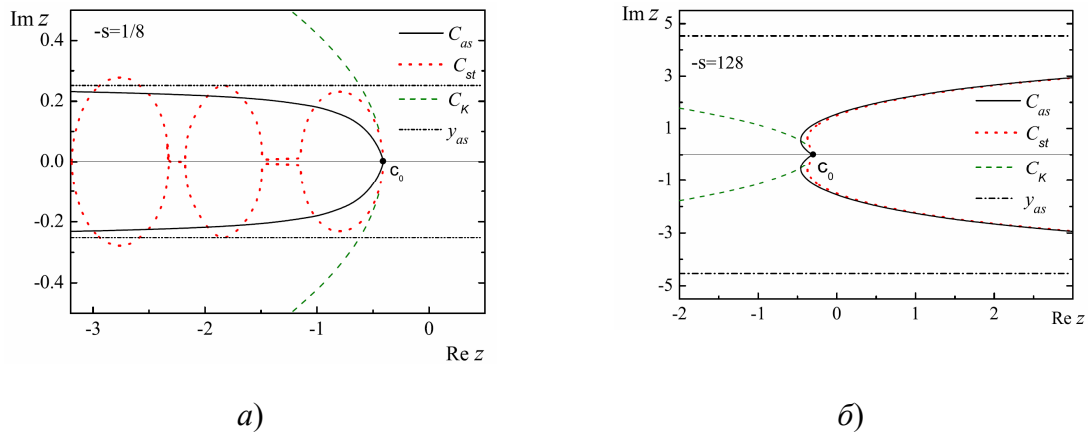


Рис. 2. Эффективные контура для интеграла (3):

a – в области $0 < -s < 4^3$; b – в области $-s > 4^3$. Сплошной линией соответствует асимптотический контур, пунктирной линии – контур Косовера; точками обозначен контур стационарной фазы; горизонтальные прямые – асимптотический предел контура стационарной фазы на бесконечности

Таким образом, в результате исследований был найден новый метод построения эффективного контура интегрирования при проведении расчетов одномерных интегралов Меллина–Барнса. Новый контур строится как приближение контура стационарной фазы в случае его ограниченного асимптотического поведения в пределе $\text{Re}(z)$, стремящемся к бесконечности. Основываясь на рассмотренных примерах, установлено, что сдвиг асимптотического контура параллельно реальной оси в седловую точку улучшает точность интегрирования. Построение асимптотического контура намного проще, чем построение других эффективных контуров, в частности, не требуется вычислять производные высших порядков, как например, для контура Косовера, кроме того, для достижения высокой точности достаточно небольшого числа полиномов в квадратурной формуле. Несомненно, что применение асимптотического контура при проведении интенсивных вычислений, связанных с обработкой экспериментальных данных, например, при нахождении параметров формы структурных функций, функций фрагментаций и распределений кварков и глюонов в нуклоне, окажется намного эффективнее, чем использование обычных прямолинейных контуров интегрирования. Показано, что асимптотический контур позволяет эффективно вычислять интегралы МБ даже при сложной форме контуров стационарной фазы.

Литература

1. Bateman, H. Higher transcendental functions / H. Bateman, A. Erdelyi. – New York : McGraw-Hill, 1953. – Vol. 1. – 345 p.
2. Fikiori, G. Integral evaluation using the Mellin transform and generalized hypergeometric functions: Tutorial and applications to antenna problems / G. Fikiori // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2006. – Vol. 54. – P. 3895–3907.
3. Gluza, J. Efficient evaluation of massive Mellin-Barnes integrals / J. Gluza, T. Jelinski, D. A. Kosower // Phys. Rev. D. – 2017. – Vol. 95. – Article ID: 076016.
4. Sidorov, A.V. Asymptotics of the contour of the stationary phase and efficient evaluation of the Mellin-Barnes integral for the F_3 structure function / A. V. Sidorov, V. I. Lashkevich, O. P. Solovtsova // Phys. Rev. D. – 2018. – Vol. 97. – Article ID: 076009.
5. Kosower, D. A. Evolution of parton distributions / D. A. Kosower // Nucl. Phys. B. – 1997. – Vol. 506. – P. 439–467.